

### 1<sup>Ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ.

#### Ηλεκτρικές & μηχανικές ταλαντώσεις

#### Περιοδικά φαινόμενα.

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{N}{t} \\ T &= \frac{1}{f} \end{aligned} \right\} T = \frac{t}{N}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{d\phi}{dt}$$

↓  
Για κυκλική κίνηση  
(ή για να βρω τη μεταβολή φάσης.)

#### Απλή αρμονική ταλάντωση.

$F = -Dx$			
Όταν $x_{t=0}=0\text{m}$ και $v_{t=0}>0$	$x = A\eta\mu\omega t$	$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t$	$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu\omega t$
Όταν $x_{t=0} \neq 0\text{m}$	$x = A\eta\mu(\omega t + \phi)$	$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi)$	$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi)$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
-------------------------------	---	-------------------------------

$E = K + U$	$K = \frac{1}{2} m v^2$	$U = \frac{1}{2} D x^2$
$E = K + U =$	$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$	$U_{\max} = \frac{1}{2} D A^2$

$x_{\max} = A$	$v_{\max} = \omega A$	$\alpha_{\max} = \omega^2 A$
	$v = \omega A \sigma\upsilon\nu\omega t$	$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu\omega t = -\omega^2 x$

#### Χρήσιμες σχέσεις.

$$x_{t=0} = A\eta\mu\phi \Rightarrow \eta\mu\phi = \frac{x_{t=0}}{A}$$

$$D (=k) = m\omega^2$$

$$F = ma$$

$$\omega^2 A^2 = v^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}, \quad x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

(θέλει απόδειξη μέσω της  $E=K+U$ )

# Ηλεκτρικές ταλαντώσεις.



Όταν $q_{t=0}=Q$	$q=Q\sin\omega t$	$i=-I\eta\mu\omega t$
Όταν $q_{t=0}\neq Q$	$q=Q\sin(\omega t+\phi)$	$i=-I\eta\mu(\omega t+\phi)$
Όταν $q_{t=0}=0$	$q=Q\eta\mu\omega t$	$i=I\sigma\upsilon\nu\omega t$

$T = 2\pi\sqrt{LC}$	$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
---------------------	--	--------------------------------

$E = U_B + U_E$	$U_B = \frac{1}{2} Li^2$	$U_E = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$
$E = U_B + U_E =$	$U_{Bmax} = \frac{1}{2} LI^2$	$U_{Emax} = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$

$q_{max} = Q$	$i_{max} = I = Q\omega$
---------------	-------------------------

Στον πυκνωτή	$Q = CV_{max}$	$V = \frac{q}{C}$	$U_E = \frac{1}{2} CV^2 (= \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2)$
Στο πηνίο	$(i_{max} = Q\omega)$	$V_{avt} = -L \frac{di}{dt}$	$(U_B = \frac{1}{2} Li^2)$
Στην αντίσταση		$V=RI$	Δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια

## Φθίνουσες ταλαντώσεις.

Για μερικές ισχύει:  $F' = -bv$

Τότε, ισχύουν και:  $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ ,  $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.} \geq 1$

↓  
Λ: αυξάνεται με το b  
      μειώνεται με το m

## Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Ιδιοσυχνότητα  $f_0$ :    Για μηχανική (ελατήριο):    Για ηλεκτρική:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Χρήσιμες σχέσεις.

$$C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{l} \qquad P = V \cdot i \qquad U_E = V \cdot i \cdot t$$

## Σύνθεση ταλαντώσεων. Ειδικές περιπτώσεις σύνθεσης:



### A. Ίδια: θέση ισορροπίας, διεύθυνση, $\omega$ . Διαφορετικά: $A_i$ και $\phi$ .

Από τη σύνθεση των ταλαντώσεων:

$$x_1 = A_1 \cdot \eta\mu\omega t$$

$$x_2 = A_2 \cdot \eta\mu(\omega t + \phi)$$

προκύπτει η ταλάντωση:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \vartheta)$$

με πλάτος:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$$

φάση:

$$\omega t + \vartheta$$

και  $\vartheta$  που βρίσκω από την:

$$\epsilon\phi\vartheta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$$

Από το  $A'$  βλέπω ότι όταν  $\phi=0^\circ$

$$A' = A_1 + A_2$$

ενώ όταν

$$\phi=180^\circ$$

$$A' = |A_1 - A_2| \text{ (και φάση αυτή του μεγαλύτερου } A_i)$$

### B. Ίδια: θέση ισορροπίας, διεύθυνση, A. Διαφορετικά: $\omega_i$ .

Από τη σύνθεση των ταλαντώσεων:

$$x_1 = A \cdot \eta\mu\omega_1 t \text{ και } x_2 = A \cdot \eta\mu\omega_2 t$$

προκύπτει η ταλάντωση:

$$x = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Όταν  $\omega_1 \approx \omega_2$  προκύπτει **διακρότημα**  
όποτε έχω

$$x = A' \cdot \eta\mu\bar{\omega}t$$

με (μεταβαλλόμενο χρονικά) πλάτος:

$$A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

και φάση\*:

$$\bar{\omega}t = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \quad \text{με} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$$

Το διακρότημα έχει\*\*

$$\omega_\delta = |\omega_1 - \omega_2|$$

και

$$f_\delta = |f_1 - f_2| = \frac{1}{T_\delta} = \frac{\omega_\delta}{2\pi}$$

## Χρήσιμες σχέσεις.

$$E = F \cdot x$$

$$P = \frac{dE}{dt} = F \cdot v$$

$$dQ = i^2 R \cdot dt$$

\* (Προφανώς, το  $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$  παίρνει και αρνητικές τιμές. Όμως επειδή δε νοείται αρνητικό πλάτος, όταν το  $A' < 0$ , θεωρούμε ότι η φάση αυξάνει κατά  $\pi$ ).

\*\* Από την  $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$  ίσως περίμενα  $\omega_\delta = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$ . Όμως επειδή μας ενδιαφέρει η απόλυτη τιμή του πλάτους, η συχνότητα διπλασιάζεται.

**Προσοχή:** Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο συμβολίζαμε με x την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, η απομάκρυνση αυτή συμβολίζεται με y, ενώ με x συμβολίζουμε την απόσταση από την πηγή. Οι «κίτρινοι» τύποι (και όσοι προκύπτουν από αυτούς) ισχύουν **μόνον** εφόσον έχουν φτάσει τα κύματα στο σημείο x.

## 2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ. Κύματα



### Μηχανικά κύματα.

Ταχύτητα διάδοσης κύματος:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Αρμονικό κύμα:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right)$$

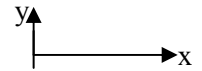
όποτε θα έχω:

Φάση:

$$2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right)$$

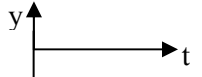
Στιγμιότυπο κύματος:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \sigma\tau\alpha\theta \mp \frac{x}{\lambda} \right)$$



Ταλάντωση ενός σημείου του μέσου:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \sigma\tau\alpha\theta \right)$$



Διαφορά φάσης δύο υλικών σημείων (θέλει απόδειξη):

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Διαφορά φάσης του ίδιου υλικού σημείου (θέλει απόδειξη):

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

### Συμβολή κυμάτων (δυο διαστάσεις - επιφάνεια).

Από τη συμβολή των δυο κυμάτων:

$$y_{1,2} = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_{1,2}}{\lambda} \right)$$

προκύπτει η ταλάντωση:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

με (μεταβαλλόμενο χωρικά) πλάτος:

$$A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}$$

και φάση:

$$2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

Από το A' βλέπω ότι όπου

$$|r_1 - r_2| = N\lambda = 2N \frac{\lambda}{2},$$

έχω μέγιστη ταλάντωση

ενώ όπου

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

έχω απόσβεση.

### Στάσιμα κύματα (μια διάσταση).

Από τη συμβολή των δυο κυμάτων:

$$y_{1,2} = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right)$$

προκύπτει η ταλάντωση:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

με (μεταβαλλόμενο χωρικά) πλάτος:

$$A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

και φάση\*:

$$2\pi \frac{t}{T}$$

Από το A' βλέπω ότι όπου

$$x = N \frac{\lambda}{2} = 2N \frac{\lambda}{4},$$

έχω μέγιστη ταλάντωση (κοιλία)\*\*

ενώ όπου

$$x = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$$

έχω απόσβεση (δεσμό)\*\*.

\* (Προφανώς, το  $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda}$  παίρνει και αρνητικές τιμές. Όμως επειδή δε νοείται αρνητικό πλάτος, όταν το  $A' < 0$ , θεωρούμε ότι η φάση αυξάνει κατά  $\pi$ ).

\*\* Το x μετράται ως απόσταση από κοιλία (ή από την «πηγή», εννοείται).

# Ηλεκτρομαγνητικά κύματα



Βασικές σχέσεις:

$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$
$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$
$\frac{E}{B} = c$

$v = \lambda \cdot f$	$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$
-----------------------	---

Η  $f$  είναι ανεξάρτητη του οπτικού μέσου.  $\lambda_0$  το μήκος κύματος στο κενό.

Δευτερογενείς σχέσεις:

**Αν έχω ένα οπτικό μέσο:**

(Έχω 2 πηγές και 1 οπτικό μέσο. Ο δείκτης αναφέρεται στις  $f$  των πηγών.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v}{f_1} \\ \lambda_2 &= \frac{v}{f_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \\ f_1 &= f_2 \end{aligned}$$

**Ανάκλαση και διάθλαση (Έχω δύο οπτικά μέσα).**

(Έχω 1 πηγή και 2 οπτικά μέσα. Ο δείκτης αναφέρεται στα οπτικά μέσα.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\lambda_0}{n_1} \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_0}{n_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Προσοχή:} \\ f_1 &= f_2 \end{aligned}$$

$\frac{\eta \mu \theta_a}{\eta \mu \theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{ή} \quad n_a \eta \mu \theta_a = n_b \eta \mu \theta_b$	Νόμος του Snell.
$\eta \mu \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \quad (n_a > n_b \text{ όπου } a \text{ το αρχικό μέσο})$	Ολική ανάκλαση (κρίσιμη γωνία)

**Διασκεδασμός**

Με αύξηση των:	$n$ (δείκτης διάθλασης)	$f$ (συχνότητα)	$\theta$ (γωνία εκτροπής)
Μειώνονται τα:	$v$ (ταχύτητα διάδοσης)	$\lambda$ (μήκος κύματος)	$\varphi$ (γωνία διάθλασης)

# 4<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ.

## Μηχανική στερεού σώματος.



### Οι κινήσεις στερεών σωμάτων.

$\vec{a}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = \omega R$	$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$
--	-------------------------------------	--

### Ροπή δύναμης («αντίστοιχο» δύναμης)..

$\tau = Fl$	Ροπή δύναμης ως προς άξονα ( $l$ η κάθετη απόσταση).
$\tau = Fl$	Ροπή δύναμης ως προς σημείο.
$\tau = Fd$	Ροπή ζεύγους δυνάμεων.

### Ισοροπία στερεού σώματος.

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum \tau = 0$
----------------	----------------	-----------------

### Ροπή αδράνειας («αντίστοιχο» μάζας).

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$	Ροπή αδράνειας στερεού ως προς άξονα.
$I_p = I_{cm} + Md^2$	Ροπή αδράνειας στερεού ως προς άξονα ( $d$ η απόσταση από το κέντρο μάζας).

### Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης.

(«Αντίστοιχο» θεμελιώδους νόμου της μηχανικής:  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ).

$\sum \vec{\tau} = I\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$	Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης.
$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	Γενικότερη διατύπωση θεμελιώδους νόμου στροφικής κίνησης.

### Στροφορμή («αντίστοιχο» ορμής).

$L = pr = mvr = m\omega r^2$	Στροφορμή υλικού σημείου.
$L = I\omega$	Στροφορμή στερεού σώματος.
$L = L_1 + L_2 + \dots$	Στροφορμή συστήματος.

## Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.



$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	Κινητική ενέργεια στροφικής (μόνο) κίνησης.
$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$	Κινητική ενέργεια μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

## Έργο κατά τη στροφική κίνηση.

$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \tau \theta$	Έργο.
$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$	Ισχύς.
$\sum W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$	Θεώρημα έργου-ενέργειας για τη στροφική κίνηση.

## Αντιστοιχίες μεγεθών και νόμων μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Θέση $x$	Γωνία $\theta$
Δύναμη $\mathbf{F}$	Ροπή (δύναμης) $\tau$
Μάζα $m$	Ροπή αδράνειας $I$
Ταχύτητα $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{γων} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$	Στροφορμή $L = I\omega$
Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής $\sum \vec{F} = m\vec{a}$	Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης $\sum \vec{\tau} = I\vec{a}_{γων}$
1 <sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα Αν $\sum \vec{F}_{εξ} = 0$ , $\vec{p} = \text{σταθ}$	1 <sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση Αν $\sum \vec{\tau}_{εξ} = 0$ , $\vec{L} = \text{σταθ}$
2 <sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	2 <sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

## Χρήσιμες σχέσεις.

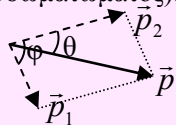
$$\begin{array}{llll}
 x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 & v = v_0 + a t & s = \theta \cdot R & F_{\text{κεντρομόλος}} = \frac{m v^2}{r} \\
 \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_{γων} t^2 & \omega = \omega_0 + a_{γων} t & v = \omega \cdot R & P = F \cdot v = \tau \cdot \omega
 \end{array}$$

## 5<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ.

### Κρούσεις και σχετικές κινήσεις.

#### Κρούσεις.

Διατήρηση	Πότε ισχύει
Ορμής: $\mathbf{p}_{\text{πριν}} = \mathbf{p}_{\text{μετά}}$	Σε ΟΛΕΣ τις κρούσεις
Κινητικής ενέργειας: $K_{\text{πριν}} = K_{\text{μετά}}$	Στις ελαστικές κρούσεις

Μετωπική ελαστική κρούση				Πλάγια κρούση	
Αν	$m_1 = m_2$	$v_2 = 0$		<p style="text-align: center;">Νόμος συνημιτόνων (για το μέτρο της ορμής συσσωματώματος):</p> $p_{\text{συσσωμ}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\phi}$ <p style="text-align: center;">Νόμος ημιτόνων (για τη διεύθυνση της ορμής συσσωματώματος):</p> $\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\phi} = \frac{p_1}{p}$  <p style="text-align: center;">Ανεξάρτητα από το αν έχω συσσωμάτωμα, για την συνολική ορμή ισχύει:</p> $p_x^{\text{πριν}} = p_x^{\text{μετά}}$ $p_y^{\text{πριν}} = p_y^{\text{μετά}}$ <p style="text-align: center;">Μέτρο και διεύθυνση τελικής ταχύτητας:</p> $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \epsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x}$ <p style="text-align: center;">(όπου <math>\theta</math> η γωνία της <math>V</math> με τη <math>V_x</math>)</p>	
			$m_1 \ll m_2$		
τότε	$v_1' = v_2$	$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$	$v_1' = -v_1$		
	$v_2' = v_1$	$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$	$v_2' = 0$		

#### Φαινόμενο Doppler.

$f_A = \frac{v \pm v_A}{v} f_S$	Κινούμενος παρατηρητής
$f_A = \frac{v}{v \mp v_S} f_S$	Κινούμενη πηγή (S=source)
$f_A = \frac{v \pm v_A}{v \mp v_S} f_S$	Κινούμενος παρατηρητής & κινούμενη πηγή



<http://dimitris.webgalaxy.gr>

#### Χρήσιμη σχέση:

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$